SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Álgebra

Tema: Determinante y matriz inversa

Docente: Gustavo Poma Quiroz

DETERMINANTES

Es una función que, aplicada a una matriz cuadrada, la transforma en un escalar.

Notación

Sea A una matriz cuadrada, el determinante de A se representa por:

$$|A| \text{ o } \det(A)$$

CÁLCULO DE LA DETERMINANTE

Para matriz de orden 1

$$\text{Si } A = (a) \Rightarrow |A| = a$$

Ejemplos

Para matriz de orden 2

$$\text{Si } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

Ejemplos

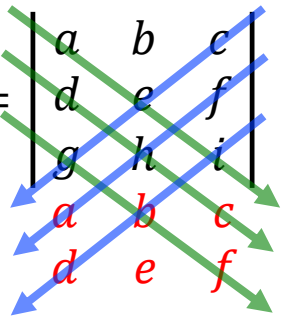
Calcule el determinante de las siguientes matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 2023 & 2021 \\ 2025 & 2023 \end{pmatrix}$ ⇨

2. $M = \begin{pmatrix} \text{sen}x & -\cos x \\ \cos x & \text{sen}x \end{pmatrix}$ ⇨

Para matriz de orden 3 (Regla de Sarrus)

Sea $P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ⇨ $|P| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$



$$|P| = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

Ejemplo

Calcule el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

PROPIEDADES DE LA DETERMINANTE

Sean A y B matrices de orden n.

1. $|I| = 1$ **I: matriz identidad**

Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

2. $|O| = 0$ **O: matriz nula**

Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. Si una matriz, tiene una fila nula (o columna nula), su determinante es CERO.

Ejemplos

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 7 & \mathbf{0} & 8 \\ -2 & \mathbf{0} & 10 \\ 1 & \mathbf{0} & \pi \end{vmatrix} = 0$$

4. Si una matriz tiene dos filas (o columnas) iguales, su determinante es CERO.

Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 7 \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

5. Si una matriz tiene dos filas (o columnas) proporcionales, su determinante es CERO.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 5 & 20 & 7 \\ -2 & -8 & 9 \\ 3 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por 4

6. El determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es CERO.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

7. El determinante de una matriz diagonal, triangular (superior o inferior), es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

Ejemplos

1. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 4.3.6 = 72$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1.(-5).3 = -15$

3. $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = (-4)(-7).2 = 56$

8. $|A| = |A^T|$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

9. Si en la determinante se le intercambian dos filas (o columnas), el determinante cambia de signo.

Ejemplos

1. $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -1$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$

10. $\begin{vmatrix} an & b & c \\ dn & e & f \\ gn & h & i \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ dm & em & fm \\ g & h & i \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Ejemplos

1. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 15 & 1 & 4 \\ 12 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.3 & 0 & 1 \\ 5.3 & 1 & 4 \\ 4.3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 2 \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2.3 & 2.4 & 2.1 \\ 5.3 & 5.1 & 5.2 \end{vmatrix} = 2.5 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

11. $|k.A| = k^n|A|$

k: escalar
n: orden de la matriz A

Ejemplos

1. Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, calcule

- $|3A| = 3^2|A| = 9.5 = 45$
- $|-4A| = (-4)^2|A| = 16.5 = 80$

2. Si la matriz M es de orden 3 y $|M| = 2$, calcule

- $|5M| = 5^3|M| = 125.2 = 250$
- $|-2M| = (-2)^3|M| = -8.2 = -16$

12. $|A.B| = |A|.|B|$

Ejemplos

1.
$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 2.5$$
$$= 10$$

2.
$$\left|\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 12.10$$
$$= 120$$

13. $|A^n| = |A|^n$

Ejemplos

1. Si $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcule

⊛ $|A^2| = |A|^2 = 4^2 = 16$

⊛ $|A^3| = |A|^3 = 4^3 = 64$

2. Si $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, calcule

⊛ $|B^3| = |B|^3 = (-1)^3 = -1$

⊛ $|B^6| = |B|^6 = (-1)^6 = 1$

14. Si a una fila (o columna) se le suma o resta un múltiplo de otra fila (o columna) respectivamente, el determinante no se altera.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_2 - 2C_3]{C_1 - C_3} \begin{vmatrix} 7-2 & 5-2.2 & 2 \\ 4-4 & 9-2.4 & 4 \\ 3-3 & 6-2.3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

Aplicación

Si se cumple que

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Calcule $|A|$

A) 18 B) 30 C) 25 D) 21 E) 20

Resolución:

CÉSAR VALLEJO

MATRIZ ADJUNTA

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

La adjunta de A se denota y será:

$$\mathbf{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}} & \boldsymbol{A_{13}} \\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}} & \boldsymbol{A_{23}} \\ \boldsymbol{A_{31}} & \boldsymbol{A_{32}} & \boldsymbol{A_{33}} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}$$

Donde

$$\boldsymbol{A_{ij}} = \begin{cases} \boldsymbol{|M_{ij}|} \text{ ; } \boldsymbol{i+j} \textbf{ es PAR} \\ \boldsymbol{-|M_{ij}|} \text{ ; } \boldsymbol{i+j} \textbf{ es IMPAR} \end{cases}$$

$\boldsymbol{|M_{ij}|}$: Determinante de orden $(n-1)$ obtenida de A eliminando la fila i y la columna j .

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -1$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 9$

$$\Rightarrow \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

Matriz singular

Decimos que la matriz A es singular si:

$$|A| = 0$$

Ejemplos

1. $A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$

2. $B = \begin{pmatrix} 7 & \pi & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 0$

3. $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = 0$

La matriz C es una **matriz NO singular**.

Definición de matriz inversa

Sea la matriz cuadrada A NO singular, la inversa de A se denota como $\boldsymbol{A^{-1}}$ y se define:

$$\boldsymbol{A \,.\, A^{-1} = A^{-1} . A = I}$$

CÁLCULO DE LA INVERSA

Para matriz de orden 1

$$\textbf{Si } \boldsymbol{A = (a)} \Rightarrow \boldsymbol{A^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)}$$

Ejemplos

1. $A = (6) \Rightarrow A^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)$

2. $B = \left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow B^{-1} = (5)$

Para matriz de orden 2

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ -\frac{9}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Para matriz de orden ≥ 3

$$A^{-1}=\frac{\text{Adj}(A)}{|A|}$$

Aplicación

Halle la suma de elementos de la matriz inversa de

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A) -12 B) -10 C) 5 D) 1 E) 2

Resolución:

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

PROPIEDADES DE LA INVERSA

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$
3. $(A^{n})^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n}$
4. $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$ λ : escalar
5. $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
6. $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$

PROPIEDADES DE LA ADJUNTA

1. $\mathbf{Adj}\left(A^{-1}\right) = \mathbf{Adj}(A)^{-1}$
2. $\mathbf{Adj}\left(A^{T}\right) = [\mathbf{Adj}(A)]^{T}$
3. $\mathbf{Adj}(A^{n}) = [\mathbf{Adj}(A)]^{n}$
4. $\mathbf{Adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\mathbf{Adj}(A)$ λ : escalar, n : orden
5. $\mathbf{Adj}(A.B) = \mathbf{Adj}(B).\mathbf{Adj}(A)$
6. $|\mathbf{Adj}(A)| = |A|^{n-1}$ n : orden

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe